第 161 回数学検定 (2008.11.09 実施)　1 級 1 次：計算技能検定　解答例

※　**本解答例は、概ね次のような構成になっています。**

- **問題**
  問題文です。**数検財団実施の、頭記の検定問題より引用させていただきました。**
- **ズルい解答**
  「数学的には」よくないけれど、時間を節約するためならなりふり構ってられない、という解き方があれば、書きます。
- **普通の解答**
  数学的にまともで、また時間的に現実的な解き方です。ただし、若干省略して書いている場合があります。本解答例のメインの部分です。
- （補足）
- コメント

1.

問題　次の連立方程式の実数解の組を求めなさい。

$$\begin{cases} \left(3-\dfrac{6y}{x+y}\right)^2+\left(3+\dfrac{6y}{x-y}\right)^2=82 \\ xy=2 \end{cases}$$

ズルい解答

$xy=2$ から、とりあえず整数解がないか $\underline{(x,y)=(1,2),(2,1),(-1,-2),(-2,-1)}$ あたりを試してみると、なんとびっくり全部正解です…（汗）

普通の解答

第 1 式を変形して、

$$\left(\frac{3x-3y}{x+y}\right)^2+\left(\frac{3x+3y}{x-y}\right)^2=82$$
$$9\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2+9\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=82$$

$\frac{x-y}{x+y}=t$ とおくと、

$$9t^2+9t^{-2}=82$$
$$9t^2+18+9t^{-2}=100$$
$$9\left(t+t^{-1}\right)^2=100$$
$$t+t^{-1}=\pm\frac{10}{3} \qquad \frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}=\pm\frac{10}{3} \qquad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\pm\frac{5}{3}$$

右辺のプラスとマイナスで、それぞれ以下のような解を得る：

$+)\quad 2x^2=8y^2 \qquad x=\pm 2y \qquad xy=2$ より $(x,y)=(\pm 2,\pm 1)$

$-)\quad 8x^2=2y^2 \qquad y=\pm 2x \qquad xy=2$ より $(x,y)=(\pm 1,\pm 2)$

（答）$\underline{(x,y)=(\pm 1,\pm 2),(\pm 2,\pm 1)\ \text{（複号同順）}}$

（補足） 途中で $t=\pm 3,\pm 1/3$ を導く解法をとられた方も多いでしょう。

コメント

- 「ズルい解答」のやり方は、1 次の常套手段ですが、2 個くらい答が出たところで安心してしまいそうです。ある意味、ひっかけかもです。
- まともに進めようとすると、面倒な式変形にはまってしまいます。一息おいてから取り掛かるのが、吉ですね。やはり 1 問目は、初っぱなから取り掛からずに後回しが定石のように思います。

2.

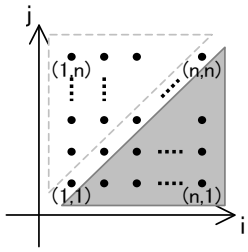
問題　次の計算をしなさい。

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\ i>j}^{n} (i+j)$$

ズルい解答

これは、普通にやるほうが手っ取り早いでしょう。

普通の解答



問題の summention A_n は、右図右下部の網掛け部分の和になる。まずすべての点について和を計算し、対称性を用いて A_n を求める。

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) &= n\sum_{i=1}^{n} i + n\sum_{j=1}^{n} j \\
&= 2n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = n^2(n+1) \\
2A_n &= n^2(n+1) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\ i=j}^{n} (i+j) \\
&= n^2(n+1) - \sum_{i=1}^{n} 2i = n^2(n+1) - n(n+1) = (n-1)n(n+1) \\
A_n &= \underline{\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)} \quad \cdots（答）
\end{aligned}$$

（補足）　答が出たら、$n = 2$ のときに正しいかどうか、くらいは確認しておきたいものです。$(2+1=)\ 3$ になるはずですね。

コメント

図のイメージができれば、対称性を使って割りと楽に解けたのではないでしょうか。筆者は最初、計算間違いしてしまいましたが…

3.

問題　ω を $x^3=1$ の虚数解の 1 つとするとき、次の行列式 D の 2 乗の値を求めなさい。

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

ズルい解答

ないと思います。

普通の解答

解答の前に、ヒントとして下記の命題を記しておきます：

命題　A, B を $n\times n$ の行列とするとき、

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}=\det(A+B)\det(A-B)$$

ここで、$\det(A)$ は A の行列式を示す[*1]。

※この証明は、練習問題として自身でやってみてください。

行（列）基本変形を駆使すれば、すぐです。

$\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$ に注意して、

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1+\omega^2 & \omega+1 \\ \omega+1 & \omega^2+1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1-\omega^2 & \omega-1 \\ \omega-1 & \omega^2-1 \end{vmatrix} \\ &= \{(\omega^2+1)^2-(\omega+1)^2\}\{-(\omega^2-1)^2-(\omega-1)^2\} \\ &= (\omega^2+\omega+2)(\omega^2-\omega)\cdot\{-(\omega^4-2\omega^2+1)-(\omega^2-2\omega+1)\} \\ &= -(\omega^2-\omega)(\omega^4-\omega^2-2\omega+2) \\ &= -(\omega^2-\omega)(-\omega^2-\omega+2)=-3(\omega^2-\omega) \\ D^2 &= 9(\omega^4-2\omega^3+\omega^2)=9(-2+\omega^2+\omega)=\underline{-27} \quad \cdots（答） \end{aligned}$$

（補足） なんでわざわざ D の「2 乗」を求めさせるのか、最初わかりませんでしたが、どっちの ω でも答を同じにするためみたいですね。

コメント

上記解答もちょっと長い計算になりましたが、命題の解き方を知らないと、さらに面倒な計算を強いられます。上記の行列式計算は、数検 1 級に意外とよく出るパターンみたいです。

[*1] 厳密には、左辺の det は $2n\times 2n$ の、右辺の det は $n\times n$ の行列式を示す。

4.

問題　次の行列 A の階数 (rank) を調べなさい。ただし、$xyz \neq 0$ とします。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 1 \\ -x & 0 & y & 0 \\ 0 & -y & 0 & z \\ -1 & 0 & -z & 0 \end{pmatrix}$$

ズルい解答

ありません。

普通の解答

行基本変形を行って調べる。

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y+xz & 0 \\ 0 & -y-xz & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -z & 0 \end{pmatrix}$$

$y + xz \neq 0$ のとき

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y+xz & 0 \\ 0 & -y-xz & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \quad \mathrm{rank}A = 4$$

$y + xz = 0$ のとき

$$= \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -z & 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \quad \mathrm{rank}A = 2$$

（答）$\underline{y + xz \neq 0 \text{ のとき } \mathrm{rank}A = 4 \text{ , } y + xz = 0 \text{ のとき } \mathrm{rank}A = 2}$

コメント

また行列の問題ですネ。しかも rank の問題とは、意表をつかれました。

しかしとりあえず基本変形をしてみれば、すぐに答の見当がついたのではないでしょうか。

5.

問題　4 次方程式 $x^4-4x-1=0$ について、次の問いに答えなさい。

①　上の方程式の実数解を求めなさい。

②　上の方程式の虚数解を求めなさい。

ズルい解答

ちょっとないと思います。

普通の解答

とりあえず因数分解を試みる。

$$\begin{aligned} x^4-4x-1 &= x^4+2x^2+1-2x^2-4x-2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}(x+1))^2 \\ &= \{x^2+\sqrt{2}x+(1+\sqrt{2})\}\{x^2-\sqrt{2}x+(1-\sqrt{2})\} \end{aligned}$$

$x^2+\sqrt{2}x+(1+\sqrt{2})=0$ より $x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}+2}\,i}{2}$

$x^2-\sqrt{2}x+(1-\sqrt{2})=0$ より $x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$

（答）① $x=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$　② $x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}+2}\,i}{2}$

（補足）$\sqrt{2}$ で約分したほうが見た目きれいですが、一応分母を有理化した形で。

コメント

① → ② の誘導になってないパターンは、初めて見ました（汗）。

因数分解に気づくかどうかの勝負でした。

6.

問題　心臓形

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を x 軸のまわりに 1 回転してできる曲面の面積を求めなさい。

ズルい解答

さすがにありません。

あえてやるなら、近そうな値を書いて、部分点ねらいでしょうか。x, y の変域は少し計算すればわかるので、球や円柱で近似するとか。…たぶん無駄でしょうが。

普通の解答

問題の曲線を x 軸のまわりに回転してできる曲面の面積は、

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi 2\pi y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\ d\theta \\
&= 2\pi\int_0^\pi (2\sin\theta - \sin 2\theta)\sqrt{(-2\sin\theta + 2\sin 2\theta)^2 + (2\cos\theta - 2\cos 2\theta)^2}\ d\theta \\
&= 4\pi\int_0^\pi 2\sin\theta(1-\cos\theta)\sqrt{1+1-2\sin\theta\sin 2\theta - 2\cos\theta\cos 2\theta}\ d\theta \\
&= 8\sqrt{2}\ \pi\int_0^\pi \sin\theta(1-\cos\theta)\sqrt{1-\cos\theta}\ d\theta \\
&= 8\sqrt{2}\ \pi\int_{-1}^1 (1+t)^{3/2}dt \qquad (t \equiv -\cos\theta) \\
&= 8\sqrt{2}\ \pi\cdot\frac{2}{5}\cdot 4\sqrt{2} = \underline{\frac{128}{5}\pi} \quad \cdots（答）
\end{aligned}$$

（補足） 心臓形の曲線の概形は、ネットで適当に調べてください（自分で描こうとして、挫折）。すみません。

ちなみに変域は、それぞれ $-3 \leq x \leq \frac{3}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$ です。

コメント

回転体の表面積（by 媒介変数表示）の公式を知っていなければ、ほぼ手が出なかったのではないでしょうか。筆者も知りませんでした（すみません）。

公式を知っているかどうかだけが、問われた問題といえるでしょう。

7.

問題　$0 < x < 1$ における微分方程式

$$u''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x)$$

を満たし、２点境界条件 $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$ を満たす解 $u(x)$ を求めなさい。

ズルい解答

ありません。

普通の解答

問題の微分方程式の特解 $u(x) = u_0(x) = \sin(\pi x)$ は、すぐに見つかる。

$\frac{d^2}{dx^2}(u(x) - u_0(x)) = 0$ より、$u(x) - u_0(x) = C_1 x + C_2$

境界条件より $C_1 = \pi$, $C_2 = 0$

（答）$\underline{u(x) = \sin(\pi x) + \pi x}$

（補足）一瞬、波動方程式か？と思いましたが…違いますね。x を時間と思えば、運動方程式なのですが。

あと、問題には u の定義域・連続性・微分可能性についてちゃんと書いてくれていないのですが、$\Omega = (0, 1)$ として、「u は $\bar{\Omega}$ で定義され $C^2(\Omega)$ 、かつ u は $x = 0$ で（右に）連続、 u' は $x = 1$ で（左に）連続」（というか、「$u \in C^2(\bar{\Omega})$」）と解釈するべきでしょう。その前提で、答にも定義域を書きませんでした。

コメント

形だけでいえば、この問題はたいそう簡単です。絶対に落としたくない問題ですね。